**§ 4.6. Орієнтовані графи**

***Частина I***

**а) *Основні теоретичні відомості.***

***Орієнтованим графом***,або***орграфом***, ** називається пара множин, де . Елементи множини  називаються **вершинами**орграфа , а елементи множини   ***дугами***орграфа . Отже, дуга  це впорядкована пара вершин. Відповідно,  називається***множиною вершин***і  ** ***множиною дуг***орграфа **.

Якщо   дуга, то вершина  називається***початком***, а вершина  ** ***кінцем***дуги .Кажуть, що дуга  ***веде*** з вершини  у вершину .

Як і звичайний граф, орграф  може бути заданий шляхом переліку елементів скінченних множин  i , діаграмою або за допомогою матриць.

***Діаграма***орграфа відрізняється від діаграми звичайного графа тим, що дуги орграфа зображаються напрямленими лініями (відрізками або кривими), що йдуть від початку до кінця дуги. Напрямок лінії позначається стрілкою.

Занумеруємо всі вершини орграфа натуральними числами від 1 до ; дістанемо множину вершин  у вигляді .***Матрицею суміжності***  орграфа  називається квадратна матриця порядку , в якій елемент -го рядка і -го стовпчика  рівний 1, якщо ; , у противному разі.

Занумеруємо всі вершини орграфа  числами від 1 до , а дуги  числами від 1 до . ***Матрицею інцидентності*** ****** орграфа  називається **-матриця, в якій елемент -го рядка і -го стовпчика  рівний 1, якщо вершина  є початком дуги ; , якщо вершина  є кінцем дуги ; , якщо вершина  і дуга  неінцидентні.

Орграфи  i  називаються ***ізоморфними***, якщо існує таке взаємно однозначне відображеня  множини  на множину , що дуга тоді і тільки тоді, коли дуга .

***Півстепенем виходу вершини***  (позначається ) орграфа  називається кількість дуг орграфа , початком яких є вершина .

***Півстепенем заходу вершини***  (позначається ) орграфа  називається кількість дуг орграфа , кінцем яких є вершина .

***Маршрутом***або***шляхом***в орграфі  називається послідовність його вершин і дуг

 (1)

така, що , . Кажуть, що цей маршрут***веде*** з вершини  у вершину . Число  дуг у маршруті (1) називається його ***довжиною***.

Маршрут, в якому всі дуги попарно різні, називається ***ланцюгом***.Маршрут, в якому всі вершини попарно різні, називається ***простим ланцюгом***.Маршрут(1)називається***замкненим*** (або***циклічним***), якщо .Замкнений ланцюг називається ***циклом***,а замкнений простий ланцюг  ***простим циклом***, або***контуром***. Орграф називається ***ациклічним***(або***безконтурним***), якщо він не має жодного циклу.

Якщо існує маршрут, який веде з вершини *v* у вершину *w*,то кажуть, що вершина *w* є ***досяжною***з вершини *v*. У цьому випадку***відстанню*** *d* (*v*,*w*)від вершини *v* до вершини *w* називається довжина найкоротшого маршруту, що веде з *v* y *w*.Відстань між вершиною *v* i вершиною *w*, яка є недосяжною з *v*, позначається символом ** .

Вершина  орграфа  називається***джерелом***, якщо з  є досяжною будь-яка інша вершина орграфа .Вершина  називається***стоком***,якщо вона є досяжною з будь-якої іншої вершини орграфа .

***Повним орграфом***(або***турніром***) називається орграф , в якому будь-які дві вершини є інцидентними одній і тільки одній дузі орграфа.

Для повних орграфів справедливі такі твердження.

Орграф називається***сильно зв’язним***, якщо будь-які дві його вершини є досяжними одна з одної. Орграф називається ***однобічно зв’язним***,якщо для будь-яких двох його вершин принаймні одна з них є досяжною з іншої. Орграф називається ***слабо зв’язним***,якщо для будь-яких двох його вершин існує напівмаршрут, що веде з однієї вершини в іншу.

**б) *Питання для самоперевірки***

1. Як за допомогою матриці інцидентності орграфа визначити

(а) півстепені виходу та півстепені заходу кожної вершини;

(б) недосяжні вершини;

(в) тупикові вершини;

(г) чи є орграф повним?

2. Як за допомогою матриці суміжності орграфа визначити

(а) півстепені виходу та півстепені заходу кожної вершини;

(б) недосяжні вершини;

(в) тупикові вершини;

(г) чи є орграф повним?

3. Яка вершина графа називається а) джерелом, б) стоком?

4. Який граф називається сильно зв’язним, однобічно зв’язним, слабо зв’язним?

## Частина II

***Задачі для самостійної роботи***

1. Нехай задано орграф :

(а) *V* ={1,2,3,4,5}, *E* ={(1,3),(2,1),(2,5),(3,4),(4,2),(4,5)};

(б) *V* ={*a*,*b*,*c*,*d*}, *E* ={(*a*,*c*),(*a*,*d*),(*b*,*a*),(*b*,*d*),(*c*,*b*),(*d*,*c*)}.

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного із заданих орграфів.

2. Нехай . Орграф  задано за допомогою матриці суміжності :

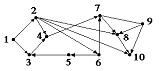
.

Визначити множину дуг *E* орграфа *G*. Побудувати діаграму та матрицю інцидентності орграфа *G*.

3. Орграф  задано його діаграмою Визначити множину вершин *V*, множину дуг *E*, матриці суміжності та інцидентності орграфа *G*.



4. Для орграфа, зображеного на рисунке, визначити



(а) півстепені виходу та півстепені заходу для кожної вершини;

(б) джерела та стоки;

(в) кількість шляхів із вершини 1 у вершину 10;

(г) відстань *d* (1,10) від вершини 1 до вершини 10;

(д) недосяжні вершини;

(е) тупикові вершини;

(є) матрицю інцидентності;

(ж) матрицю суміжності.

5. Побудувати всі попарно неізоморфні орграфи, які містять: а) 3 вершини і 3 дуги; б) 3 вершини і 4 дуги; в) 4 вершини і 3 дуги. Визначити серед них сильно зв’язні, слабо зв’язні та однобічно зв’язні орграфи.

6. Побудувати орграф із п’ятьма вершинами, який

(а) має два стоки й одне джерело;

(б) не має ні стоків, ні джерел.

7. Довести, що будь-який маршрут з вершини *v* у вершину *w* в орграфі *G* містить простий ланцюг, що веде з *v* у *w*.

8. Для орграфа  будемо називати оберненим і позначати  орграф, який відрізняється від орграфа  тільки зміною орієнтації всіх його дуг. Як пов’язані між собою матриці суміжності та матриці інцидентності орграфів  і ?

9. Довести, що для довільного орграфа  виконуються рівності а) , б) .

10. Побудувати всі попарно неізоморфні повні орграфи з п’ятьма вершинами, які містять принаймні одне джерело та принаймні один стік.

11. Проведено турнір в одне коло (кожен учасник зустрівся з усіма іншими по одному разу) серед  баскетбольних команд. Визначити, скільки команд можуть: а) не мати жодної поразки; б) не мати жодної перемоги.

## Частина III

***Задачі підвищеної складності***

1. Довести, що в повному орграфі завжди є стік.

2. Довести, що в повному орграфі може бути не більше однієї недосяжної вершини.

***Частина IV***

***Домашнє завдання***

1. Нехай задано орграф :

*V ={a,b,c,d,f}, E ={(a,b),(b,a),(c,f),(d,c),(d,f),(f,a)}.*

Побудувати діаграму, матриці суміжності та інцидентності для кожного із заданих орграфів.

2. Нехай *V ={a,b,c,d,e}*. Орграф  задано за допомогою матриці суміжності :

.

Визначити множину дуг  орграфа . Побудувати діаграму та матрицю інцидентності орграфа .

3. Визначити кількість попарно неізоморфних орграфів із  вершинами для: а) ; б) ; в) .

4. Побудувати всі попарно неізоморфні повні орграфи з трьома й чотирма вершинами. Визначити серед них сильно зв’язні, слабо зв’язні та однобічно зв’язні орграфи.

5. Довести, що в повному орграфі завжди є джерело.